

# Processamento de Imagem Morfológica (**Morfologia Matemática**)

Tsang Ing Ren

UFPE - Universidade Federal de Pernambuco

CIn - Centro de Informática



# Tópicos

---



- Introdução
- Conceitos básicos da teoria dos conjuntos
- Dilatação e erosão
- Abertura e fechamento
- Transformada *hit-or-miss*
- Alguns algoritmos morfológicos básicos
- Extensões para imagens em níveis de cinza



# Introdução



- A palavra Morfologia é originalmente um ramo da biologia que estuda as formas e estruturas dos animais e plantas. Usamos esta palavra no contexto de Morforlogia Matemática como um instrumento para extração de componentes da imagem que sejam úteis para representação e descrição da forma de uma região, como fronteiras, esqueletos e fecho convexo.
- Morfologia Matemática surgiu em 1964 das pesquisas conjuntas de **G. Matheron e J. Serra**. Entre 1964 e 1968 foram estabelecidas as primeiras noções teóricas (Operação abertura, fechamento e *Hit-Miss*, )
- A linguagem da Morfologia Matemática é a **Teoria dos Conjuntos**. Conjuntos em morfologia representa objetos numa imagem. O conjunto de todos os pixels pretos em uma imagem binária é uma descrição completa dessa imagem.
- Em imagens binárias, os conjuntos em questão são membros do espaço bidimensional de números inteiros  $Z^2$ , em que cada elemento do conjunto é um vetor bidimensional cujas coordenadas são as coordenadas  $(x,y)$  dos pixels pretos da imagem. Imagens digitais em níveis de cinza podem ser representadas por conjuntos cujos componentes estejam em  $Z^3$ .



# Introdução



$$f(x,y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,N-1) \\ \vdots & & & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \cdots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{M-1,0} & a_{M-1,1} & \cdots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix}$$



# Conceitos Básicos da Teoria dos Conjuntos



- Sendo  $A$  um conjunto em  $Z^2$ . Se  $a=(a_1,a_2)$  é um elemento de  $A$ , então:

$$a \in A$$

$$a \notin A$$

- Conjunto vazio :

$$\emptyset$$

- $A$  subconjunto de  $B$ :

$$A \subseteq B$$

- União de  $A$  e  $B$ :

$$C = A \cup B$$

- Interserção  $A$  e  $B$ :

$$D = A \cap B$$

- Conjuntos disjuntos:

$$A \cap B = \emptyset$$

- Especificação do conjunto:

$$C = \{w | w = -d, \text{ para } d \in D\}$$

- Complemento de  $A$ :

$$A^c = \{w | w \notin A\}$$

- Diferença de  $A$  e  $B$ :

$$A - B = \{w | w \in A, w \notin B\} = A \cap B^c$$

- Reflexão de  $B$ :

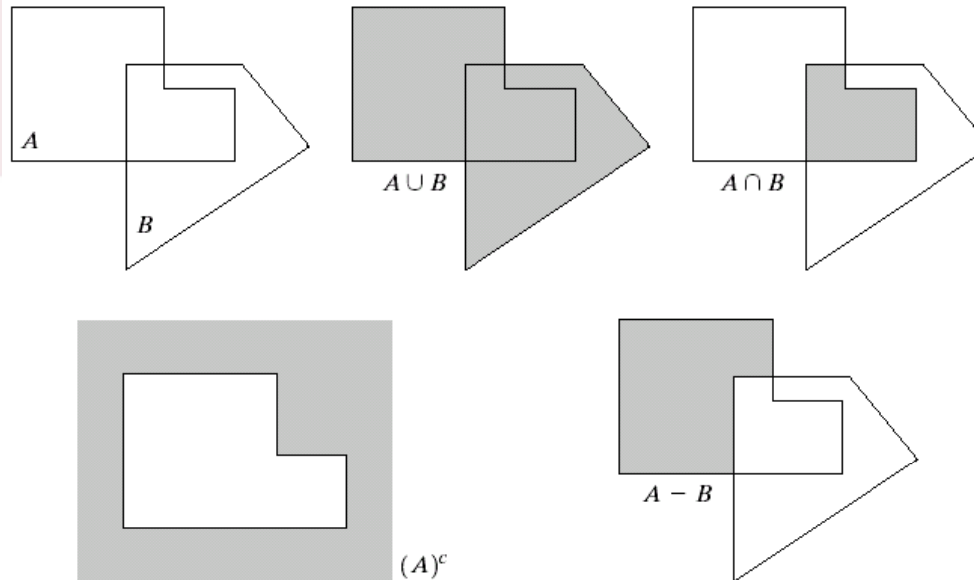
$$\hat{B} = \{w | w = -b, b \in B\}$$

- Translação de  $A$  por  $z=(z_1,z_2)$ :

$$(A)_c = \{c | c = a + z, \text{ para } a \in A\}$$

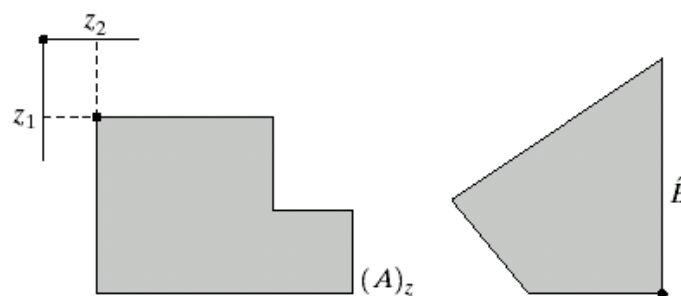


# Conceitos Básicos da Teoria dos Conjuntos



a b c  
d e

**FIGURE 9.1**  
(a) Two sets  $A$  and  $B$ . (b) The union of  $A$  and  $B$ . (c) The intersection of  $A$  and  $B$ . (d) The complement of  $A$ . (e) The difference between  $A$  and  $B$ .



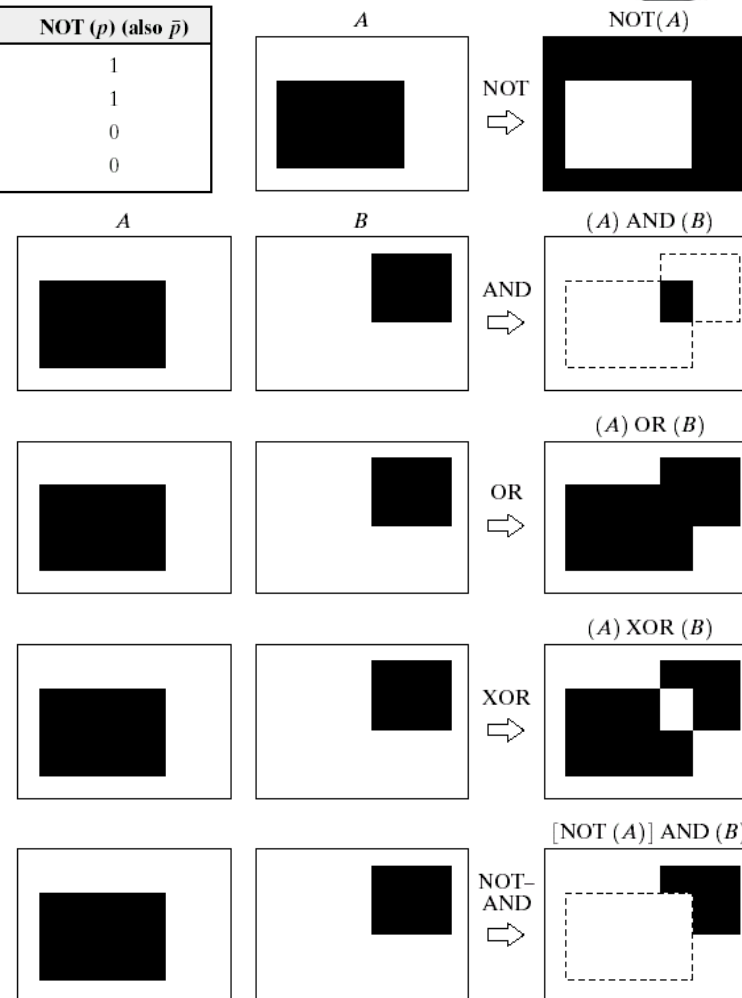
a b

**FIGURE 9.2**  
(a) Translation of  $A$  by  $z$ . (b) Reflection of  $B$ . The sets  $A$  and  $B$  are from Fig. 9.1.

# Operações Lógicas Envolvendo Imagens Binárias

**TABLE 9.1**  
The three basic logical operations.

$p$	$q$	$p$ AND $q$ (also $p \cdot q$ )	$p$ OR $q$ (also $p + q$ )	NOT ( $p$ ) (also $\bar{p}$ )
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0



**FIGURE 9.3** Some logic operations between binary images. Black represents binary 1s and white binary 0s in this example.

# Operadores Morfológicos

## Dilatação



- Operadores morfológicos fundamentais

- Dilatação**

- Sendo  $A$  e  $B$  conjuntos de  $Z^2$  e  $\emptyset$  o conjunto vazio, define-se a dilatação de  $A$  por  $B$ , denotada por  $A \oplus B$ , como:

$$A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_x \cap A \neq \emptyset\}$$

- O processo de dilatação começa na obtenção da reflexão de  $B$  em torno de sua origem, seguido da translação dessa reflexão por  $x$ .
      - A dilatação de  $A$  por  $B$  é então o conjunto de todos os deslocamentos  $x$  tais que  $A$  sobreponham-se em pelo menos um elemento não nulo.

$$A \oplus B = \{x \mid [(\hat{B})_x \cap A] \subseteq A\}$$

- O conjunto  $B$  é normalmente chamado de **elemento estruturante** da dilatação





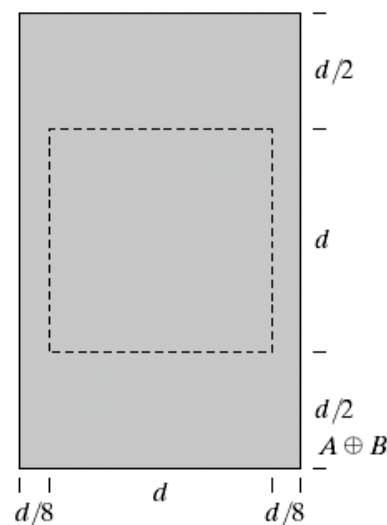
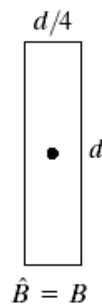
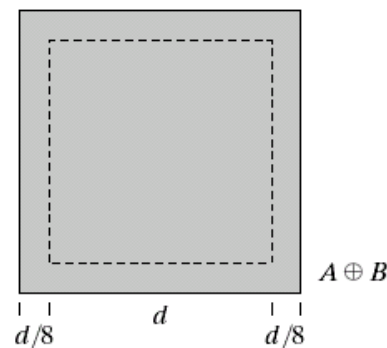
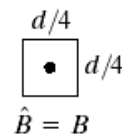
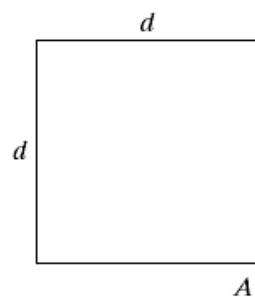
# Operadores Morfológicos

## Dilatação

a	b	c
d	e	

**FIGURE 9.4**

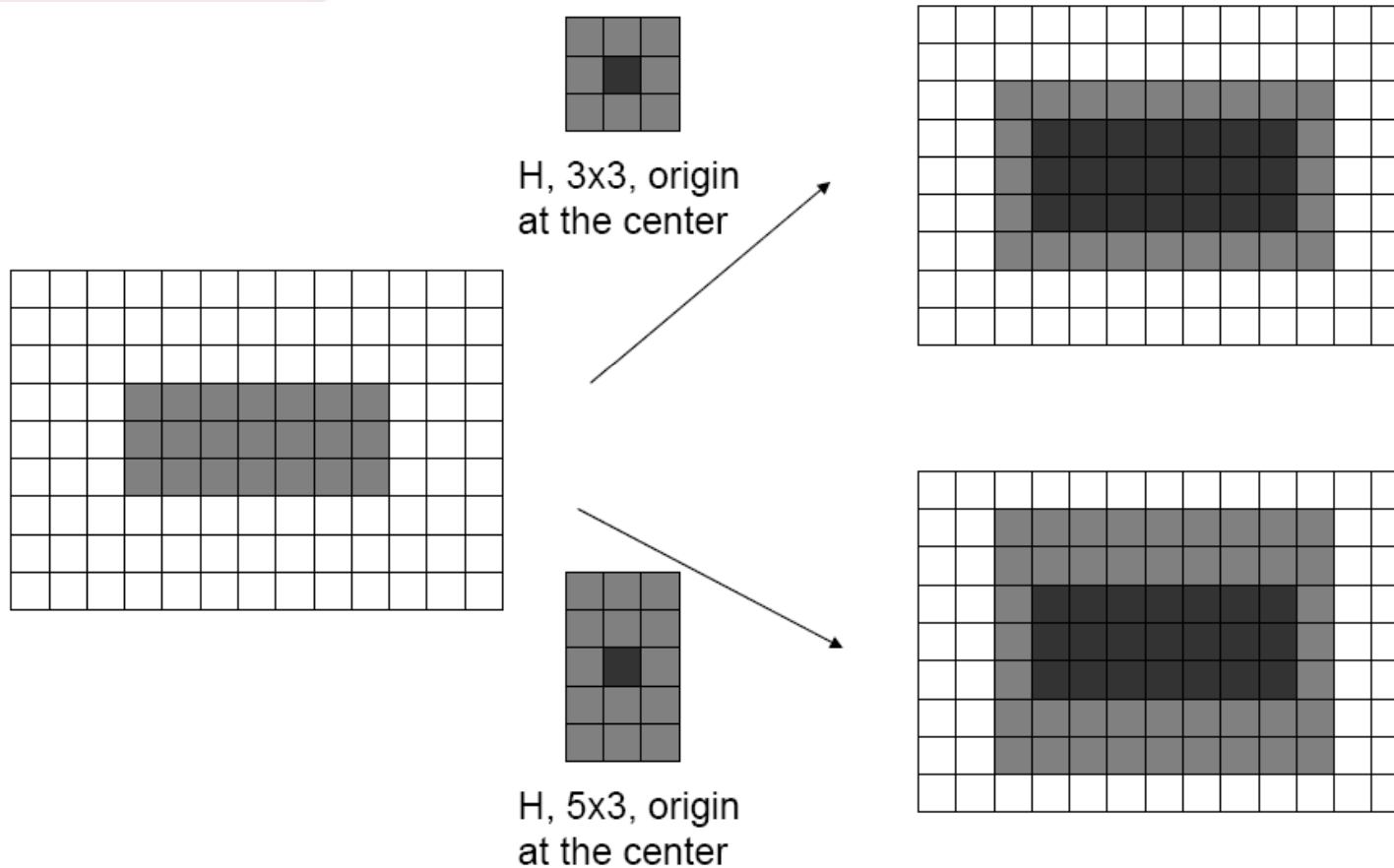
- (a) Set  $A$ .
- (b) Square structuring element (dot is the center).
- (c) Dilation of  $A$  by  $B$ , shown shaded.
- (d) Elongated structuring element.
- (e) Dilation of  $A$  using this element.



# Operadores Morfológicos

## Dilatação

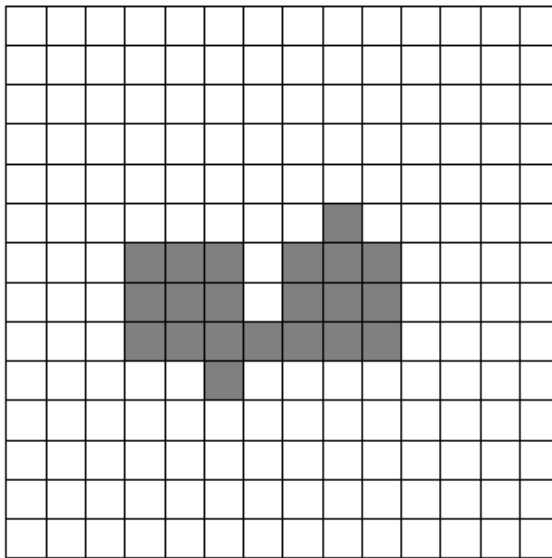
- Exemplos:



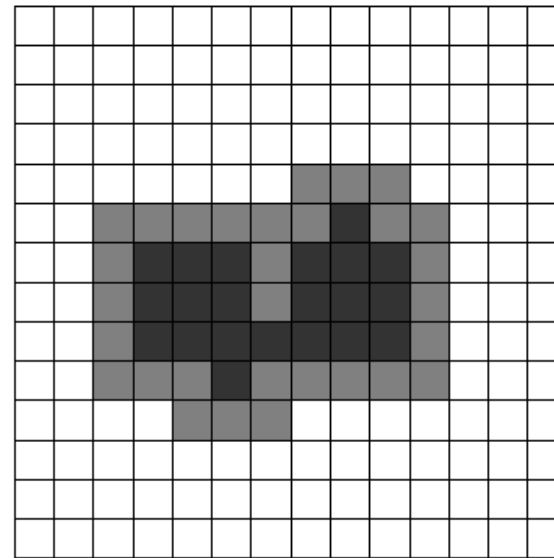
# Operadores Morfológicos

## Dilatação

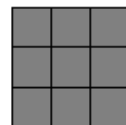
- Exemplos:



F



G

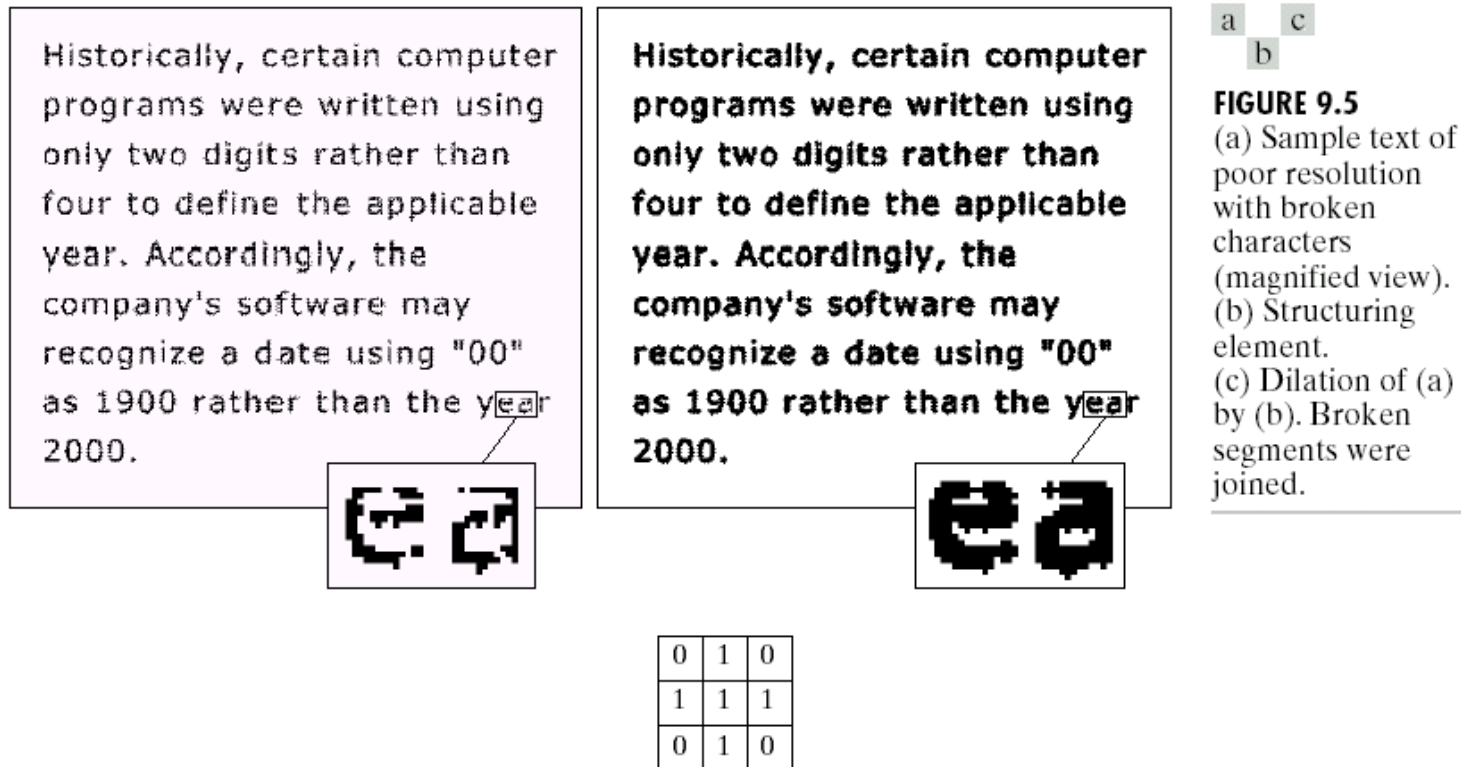


H, 3x3, origin at the center

# Operadores Morfológicos

## Dilatação

- Aplicação:
  - Preenchimento de espaço (gap filling)



# Operadores Morfológicos

## Erosão



- Operadores morfológicos fundamentais

- Erosão

- Sendo  $A$  e  $B$  em  $Z^2$ , a erosão de  $A$  por  $B$ , denotada por  $A \ominus B$ , é denotada por:

$$A \ominus B = \{x \mid (B)_x \subseteq A\}$$

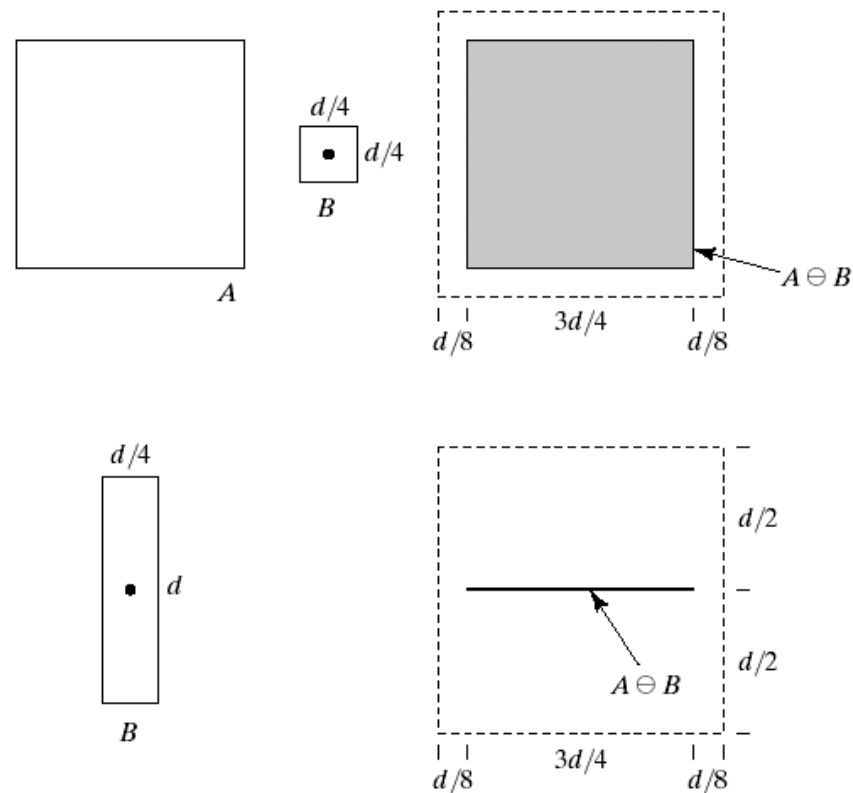
- A erosão de  $A$  por  $B$  é o conjunto de todos os pontos  $x$  tais que  $B$ , quando transladado pro  $x$  fique contido em  $A$ . Como no caso da dilatação, essa equação não é a única definição da erosão.
  - Dilatação e erosão são operações duais em relação à complementação e reflexão de conjuntos:

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$



# Operadores Morfológicos

## Erosão



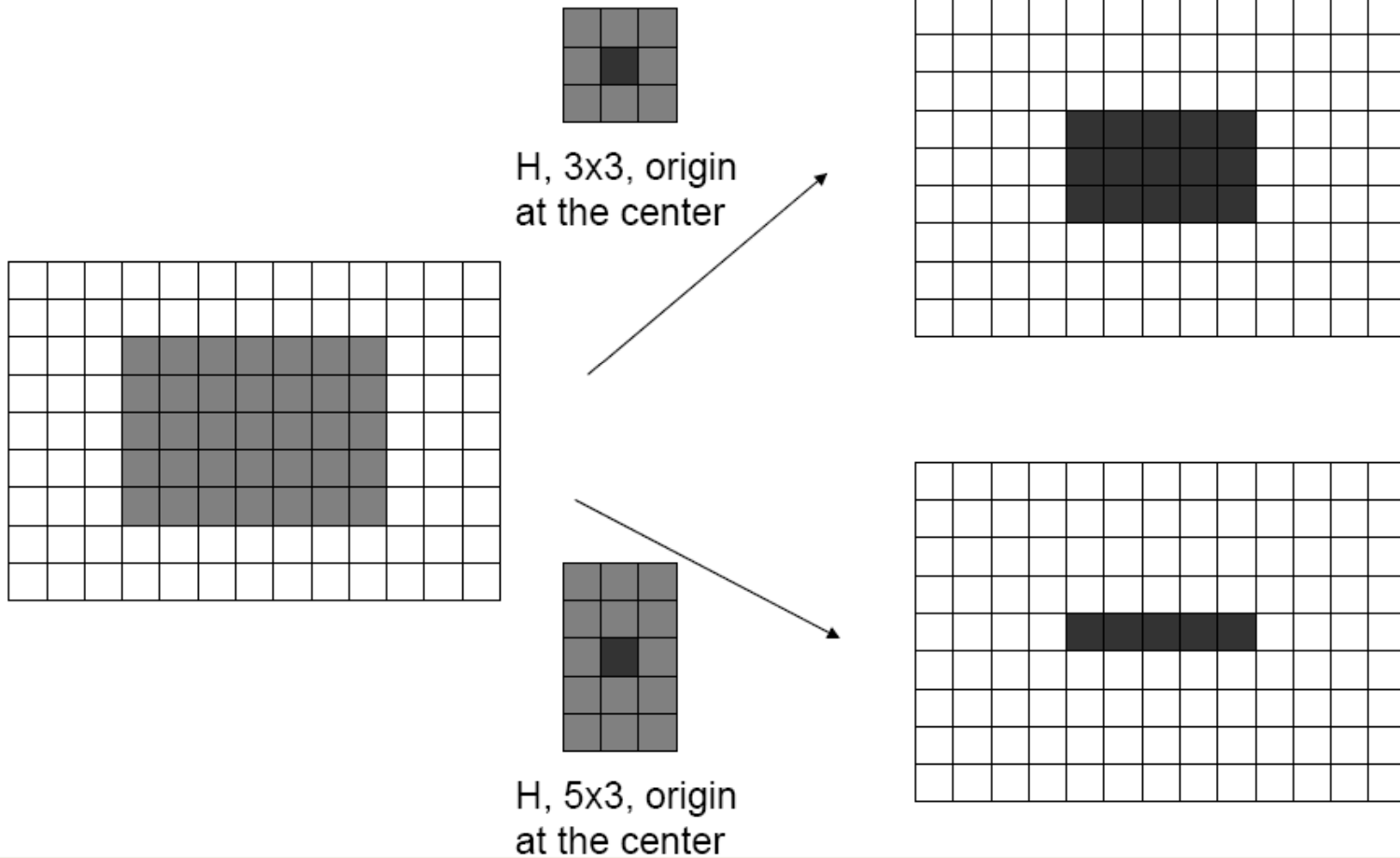
a	b	c
d	e	

**FIGURE 9.6** (a) Set A. (b) Square structuring element. (c) Erosion of A by B, shown shaded. (d) Elongated structuring element. (e) Erosion of A using this element.

# Operadores Morfológicos

## Erosão

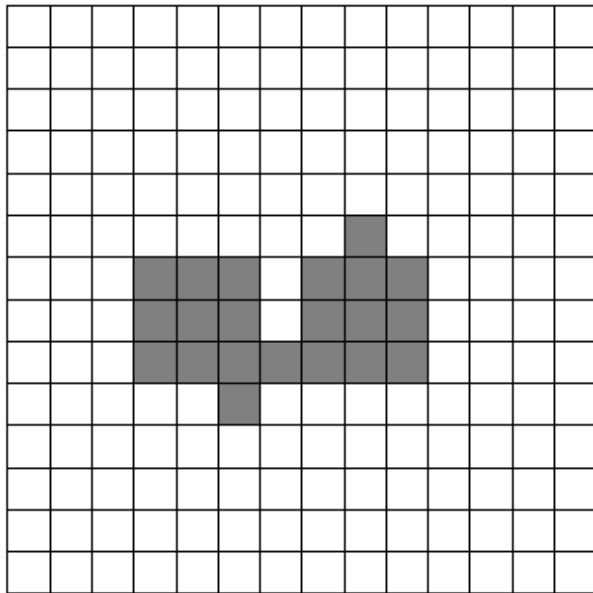
- Exemplos:



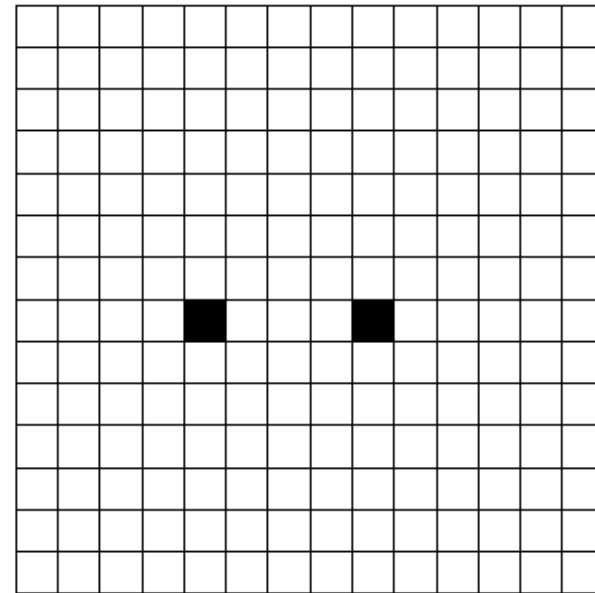
# Operadores Morfológicos

## Erosão

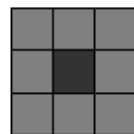
- Exemplos:



F



G



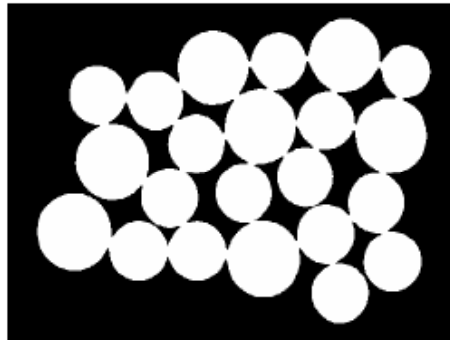
H, 3x3, origin at the center



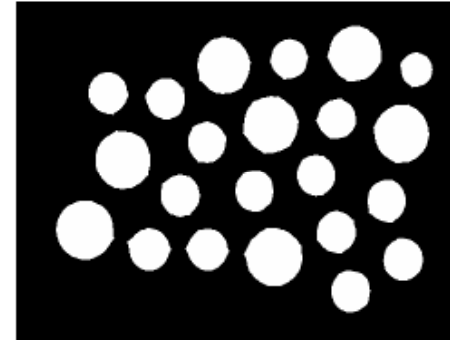
# Operadores Morfológicos

## Erosão

- Exemplos:



11 pixels (Diameter)



# Operadores Morfológicos

## Erosão

- Aplicação:
  - Remoção de componentes

1,3,5,7,9 e 15

Erosão com 13

Dilatação com 13



a b c

**FIGURE 9.7** (a) Image of squares of size 1, 3, 5, 7, 9, and 15 pixels on the side. (b) Erosion of (a) with a square structuring element of 1's, 13 pixels on the side. (c) Dilation of (b) with the same structuring element.

# Operadores Morfológicos

## Abertura e Fechamento



### ▪ Abertura e Fechamento

– A dilatação expande, enquanto a erosão reduz uma imagem.

#### – **Abertura:**

- Suaviza o contorno da imagem, quebra istmos estreitos, e elimina protusões finas.
- Erosão de A por B seguido da dilatação do resultado por B

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

#### – **Fechamento:**

- Suaviza o contorno da imagem, funde as quebras em golfos finos, elimina pequenos buracos e preenche fendas em um contorno.
- Dilatação de A por B seguida da erosão do resultado por B

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$



# Operadores Morfológicos

## Abertura e Fechamento



- A abertura e o fechamento são duais em relação à complementação e reflexão.

$$(A \bullet B)^c = (A^c \circ \hat{B})$$

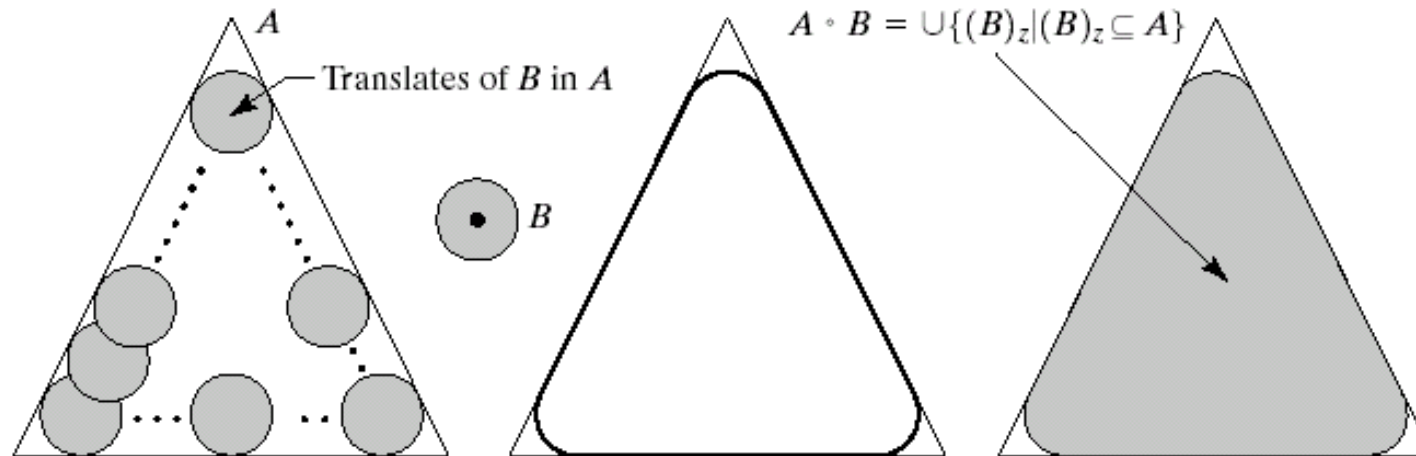
- Propriedades da operação abertura:
  - $A \circ B$  é um subconjunto (sub-imagem) de  $A$ .
  - Se  $C$  for um subconjunto de  $D$ , então  $C \circ D$  será um subconjunto de  $D \circ B$ .
  - $(A \circ B) \circ B = A \circ B$ .
- Propriedades da operação fechamento:
  - $A$  é um subconjunto (sub-imagem) de  $A \bullet B$ .
  - Se  $C$  for um subconjunto de  $D$ , então  $C \bullet B$  será um subconjunto de  $D \bullet B$ .
  - $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$ .



# Operadores Morfológicos

## Abertura

- Exemplos:



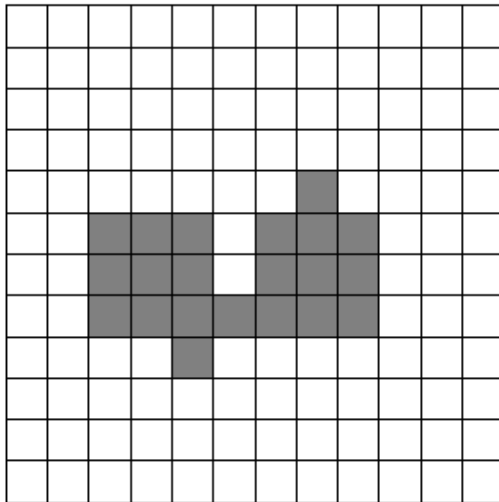
a b c d

**FIGURE 9.8** (a) Structuring element  $B$  “rolling” along the inner boundary of  $A$  (the dot indicates the origin of  $B$ ). (c) The heavy line is the outer boundary of the opening. (d) Complete opening (shaded).

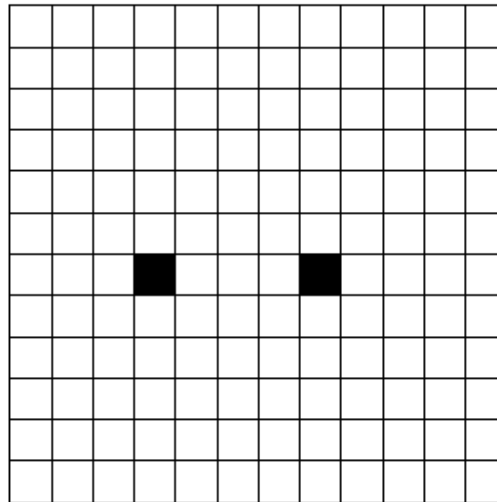
# Operadores Morfológicos

## Abertura

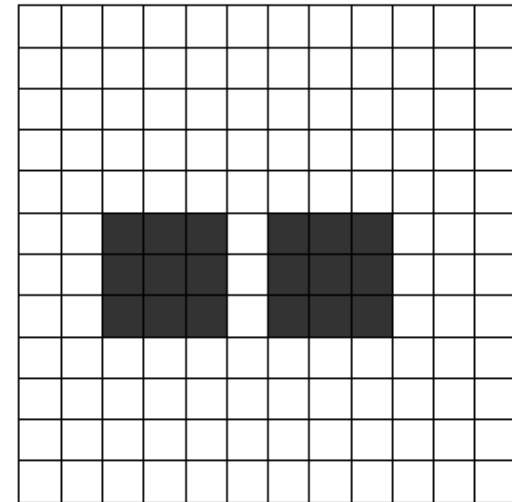
- Exemplos:



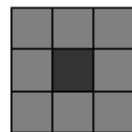
F



$F \ominus H$



$(F \ominus H) \oplus H$

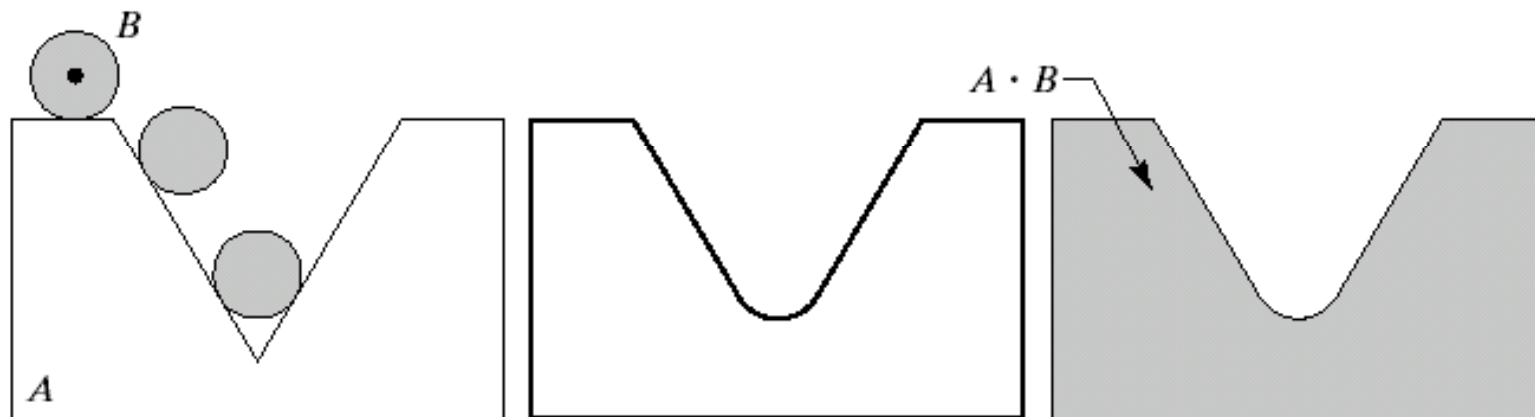


H, 3x3, origin at the center

# Operadores Morfológicos

## Fechamento

- Exemplos:



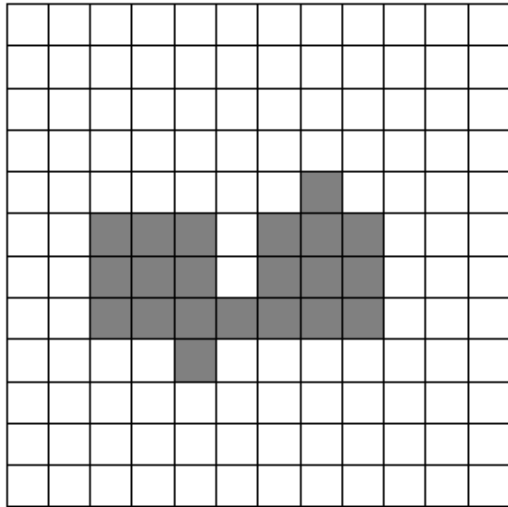
a b c

**FIGURE 9.9** (a) Structuring element  $B$  “rolling” on the outer boundary of set  $A$ . (b) Heavy line is the outer boundary of the closing. (c) Complete closing (shaded).

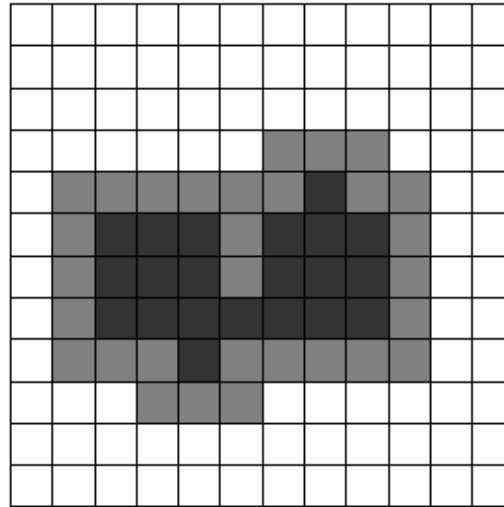
# Operadores Morfológicos

## Fechamento

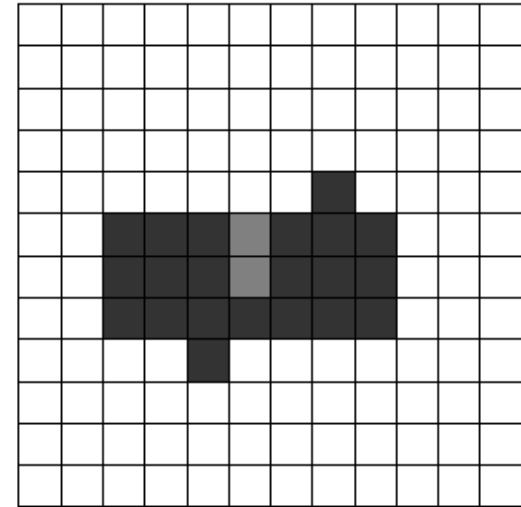
- Exemplos:



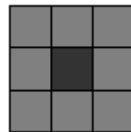
F



$F \oplus H$



$(F \oplus H) \ominus H$



H, 3x3, origin at the center

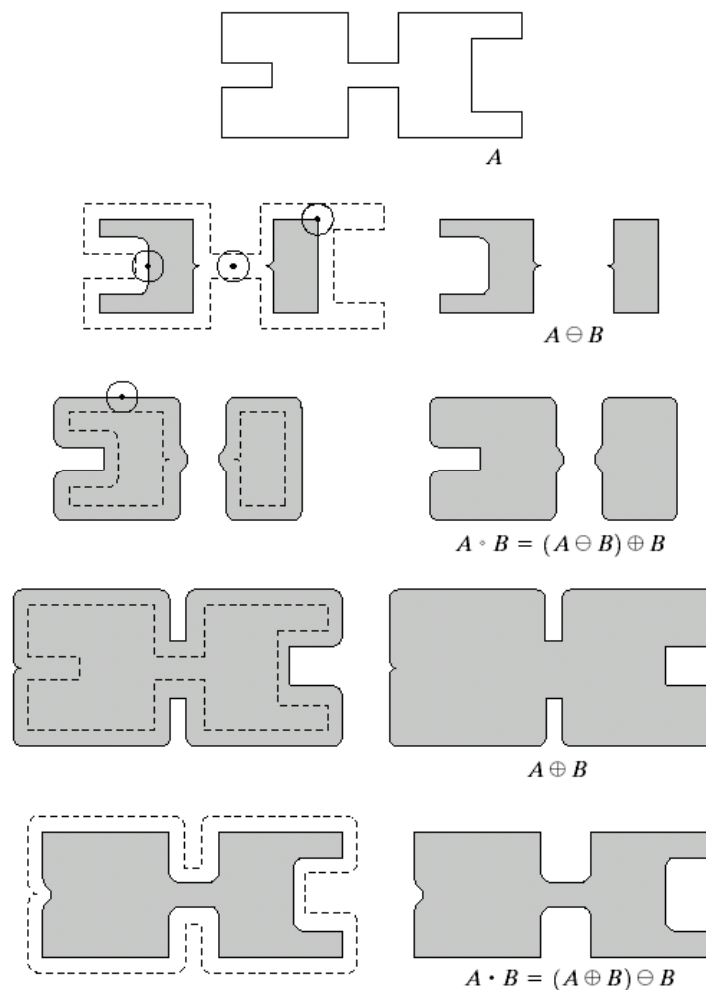


# Operadores Morfológicos

## Abertura e Fechamento

a
b c
d e
f g
h i

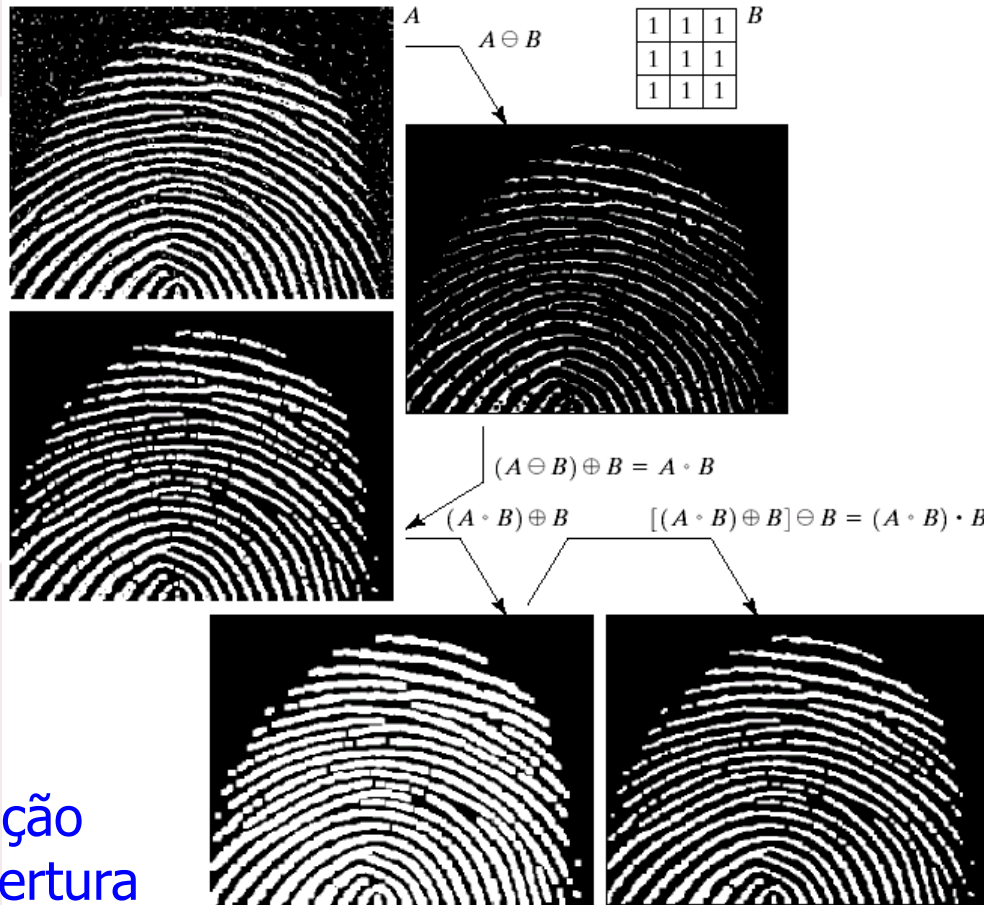
**FIGURE 9.10**  
Morphological opening and closing. The structuring element is the small circle shown in various positions in (b). The dark dot is the center of the structuring element.



# Operadores Morfológicos

## Abertura e Fechamento

- Aplicação: Redução de ruído



a b  
d c  
e f

FIGURE 9.11

(a) Noisy image.  
 (c) Eroded image.  
 (d) Opening of  $A$ .  
 (e) Dilation of the opening.  
 (e) Closing of the opening. (Original image for this example courtesy of the National Institute of Standards and Technology.)

Abertura

Dilatação da abertura

Fechamento da abertura

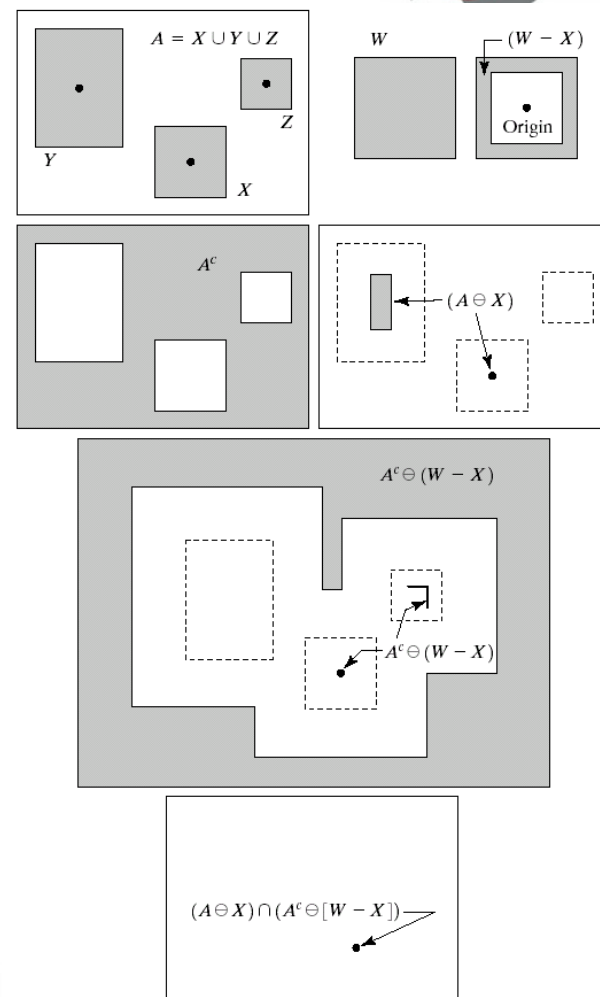
# Transformada Hit-or-Miss

- A transformada morfológica *hit-or-miss* é uma ferramenta básica para a detecção de formas.
- Definições
  - $B \rightarrow (B_1, B_2)$
  - $B_1$  é o conjunto de elementos em  $B$  associado a imagem.  $B_1 = X$ .
  - $B_2$  é o conjunto de elementos em  $B$  associado ao fundo correspondente.  $B_2 = (W - X)$ .

$$A * B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$$

ou

$$A * B = (A \ominus B_1) - (A \oplus \hat{B}_2)$$

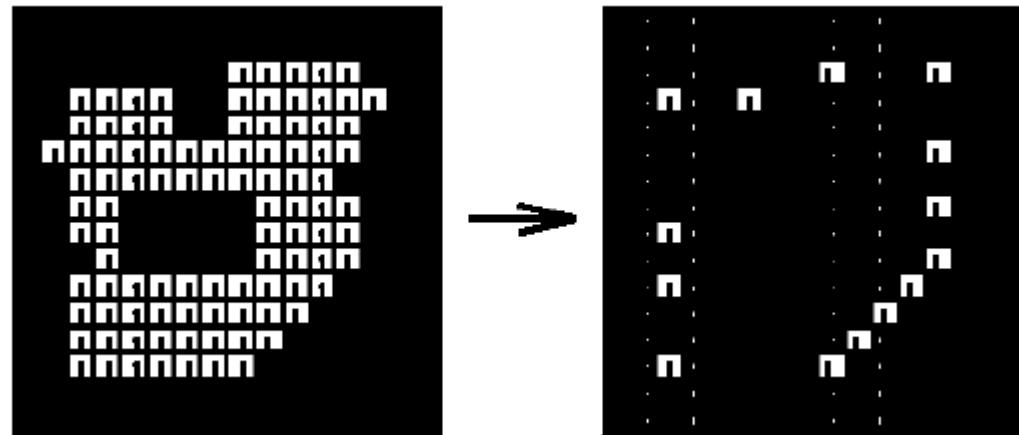
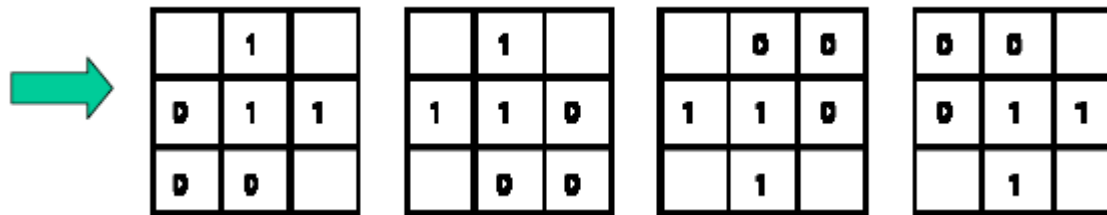


a b  
c d  
e  
f

**FIGURE 9.12**  
(a) Set  $A$ . (b) A window,  $W$ , and the local background of  $X$  with respect to  $W$ ,  $(W - X)$ . (c) Complement of  $A$ . (d) Erosion of  $A$  by  $X$ . (e) Erosion of  $A^c$  by  $(W - X)$ . (f) Intersection of (d) and (e), showing the location of the origin of  $X$ , as desired.

# Trasnformada Hit-or-Miss

- Aplicação
  - Detecção de bordas



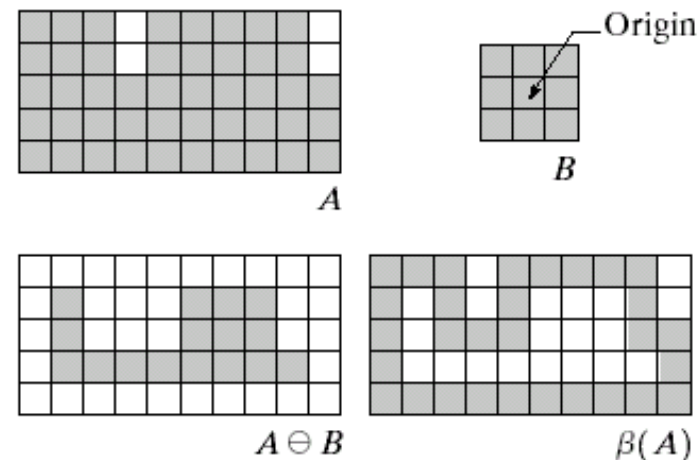
# Algoritmos Morfológicos Básicos

- No caso de imagens binárias, a principal aplicação de morfologia é a extração de componentes da imagem que sejam úteis na representação e na descrição de formas.
- **Extração de fronteiras**

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$

a	b
c	d

**FIGURE 9.13** (a) Set  $A$ . (b) Structuring element  $B$ . (c)  $A$  eroded by  $B$ . (d) Boundary, given by the set difference between  $A$  and its erosion.



# Algoritmos Morfológicos Básicos

## Extração de Fronteiras

- Exemplos:



a b

**FIGURE 9.14**

(a) A simple binary image, with 1's represented in white. (b) Result of using Eq. (9.5-1) with the structuring element in Fig. 9.13(b).

# Algoritmos Morfológicos Básicos

## Preenchimento de Regiões

- Preenchimento de regiões

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \quad k=1,2,3,\dots$$

$X_0 = p$

Até  $X_k = X_{k-1}$

a	b	c
d	e	f
g	h	i

**FIGURE 9.15**

Region filling.

(a) Set  $A$ .

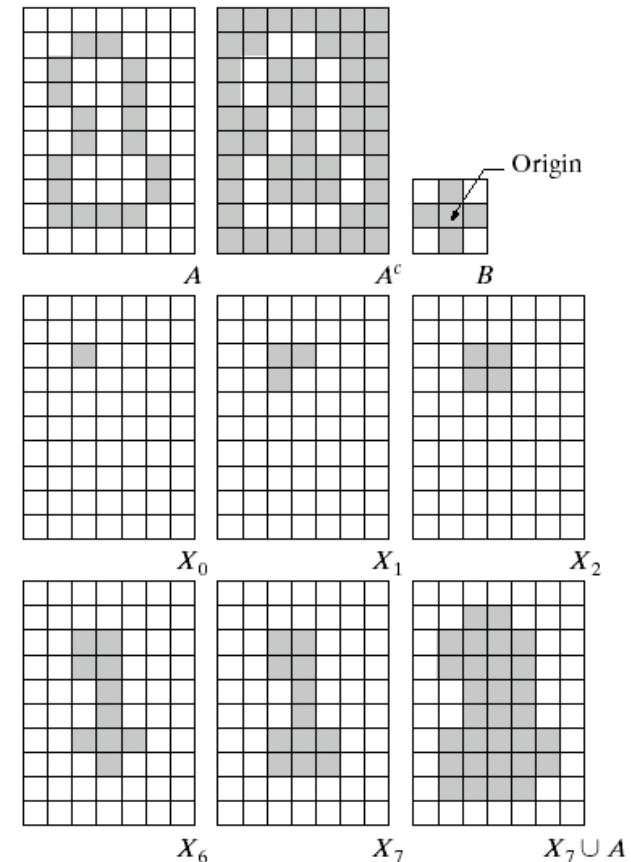
(b) Complement of  $A$ .

(c) Structuring element  $B$ .

(d) Initial point inside the boundary.

(e)–(h) Various steps of Eq. (9.5-2).

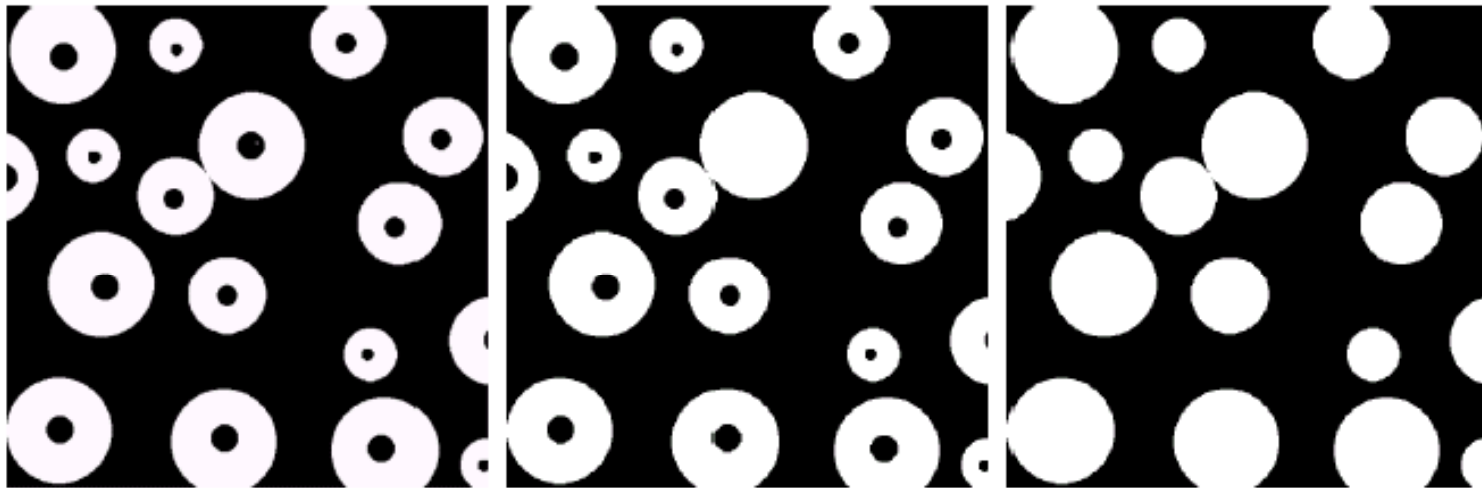
(i) Final result [union of (a) and (h)].



# Algoritmos Morfológicos Básicos

## Preenchimento de Regiões

- Exemplos:



a b c

**FIGURE 9.16** (a) Binary image (the white dot inside one of the regions is the starting point for the region-filling algorithm). (b) Result of filling that region (c) Result of filling all regions.



# Algoritmos Morfológicos Básicos

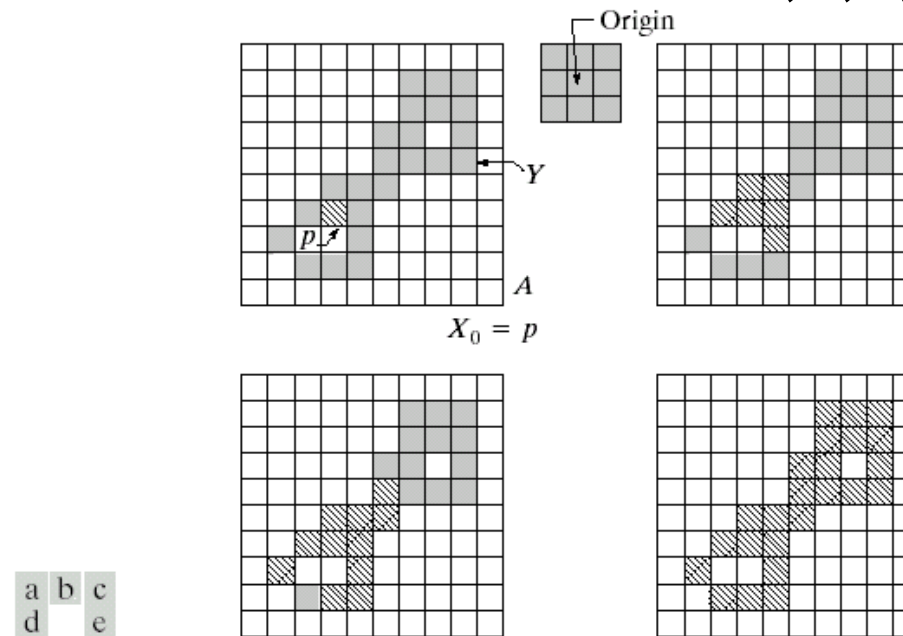
## Extração de Componentes Conectados

- Extração de componentes conectados

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \quad k=1,2,3,\dots$$

$$X_0 = p$$

$$X_k = X_{k-1}$$



**FIGURE 9.17** (a) Set  $A$  showing initial point  $p$  (all shaded points are valued 1, but are shown different from  $p$  to indicate that they have not yet been found by the algorithm). (b) Structuring element. (c) Result of first iterative step. (d) Result of second step. (e) Final result.

# Algoritmos Morfológicos Básicos

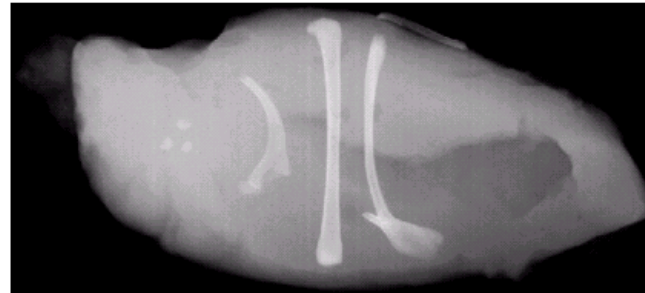
## Extração de Componentes Conectados

- Exemplos:

a  
b  
c d

**FIGURE 9.18**

(a) X-ray image of chicken filet with bone fragments.  
(b) Thresholded image.  
(c) Image eroded with a  $5 \times 5$  structuring element of 1's.  
(d) Number of pixels in the connected components of (c). (Image courtesy of NTB Elektronische Geraete GmbH, Diepholz, Germany, [www.ntbxray.com](http://www.ntbxray.com).)



Connected component	No. of pixels in connected comp
01	11
02	9
03	9
04	39
05	133
06	1
07	1
08	743
09	7
10	11
11	11
12	9
13	9
14	674
15	85

# Algoritmos Morfológicos Básicos

## Fecho Convexo

### Fecho convexo

Seja  $B^i$ ,  $i=1,2,3,4$ , representa os quatro elementos estruturantes.

$$X_0^i = A$$

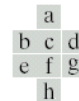
$$C(A) = \bigcup_{i=1}^4 D^i$$

$$D^i = X_{conv}^i,$$

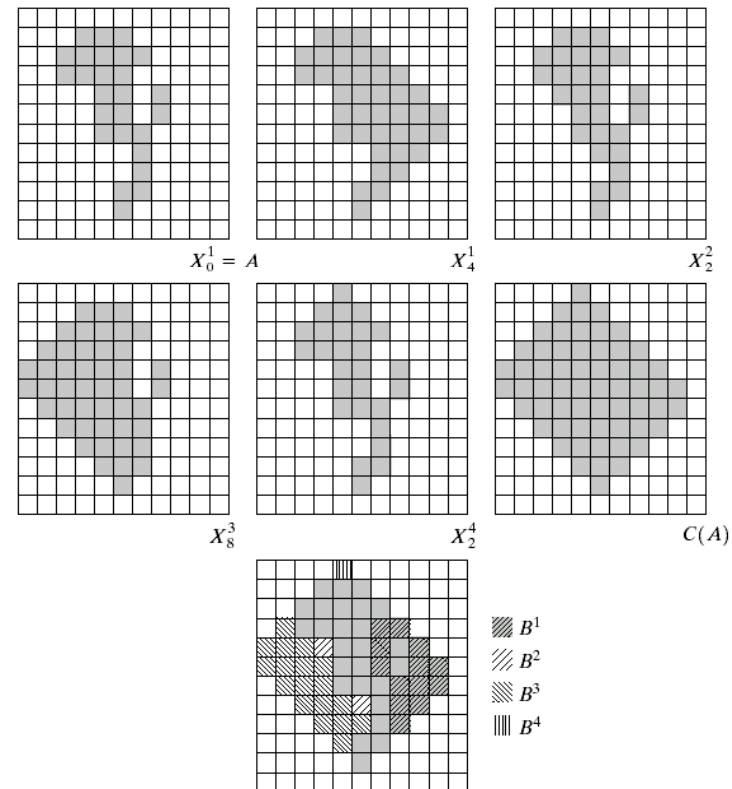
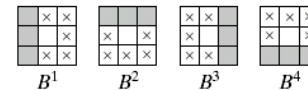
Onde “conv” indica a convergência no sendo que

$$X_k^i = X_{k-1}^i$$

$$X_k^i = (X_{k-1} * B^i) \cup A \quad i=1,2,3,\dots \quad k=1,2,3,\dots$$



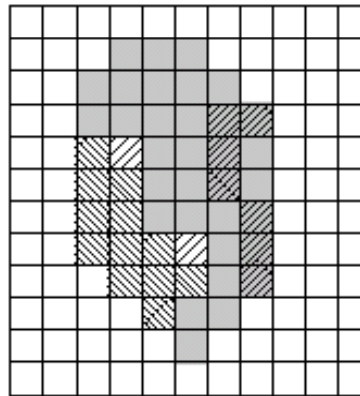
**FIGURE 9.19** (a) Structuring elements. (b) Set A. (c)–(f) Results of convergence with the structuring elements shown in (a). (g) Convex hull. (h) Convex hull showing the contribution of each structuring element.



# Algoritmos Morfológicos Básicos

## Fecho Convexo

- Deficiência do algoritmo
  - Cresce mais que o mínimo requerido do tamanho convex
  - Limitado a expansões horizontais-verticais



**FIGURE 9.20** Result of limiting growth of convex hull algorithm to the maximum dimensions of the original set of points along the vertical and horizontal directions.

# Algoritmos Morfológicos Básicos

## Afinamento



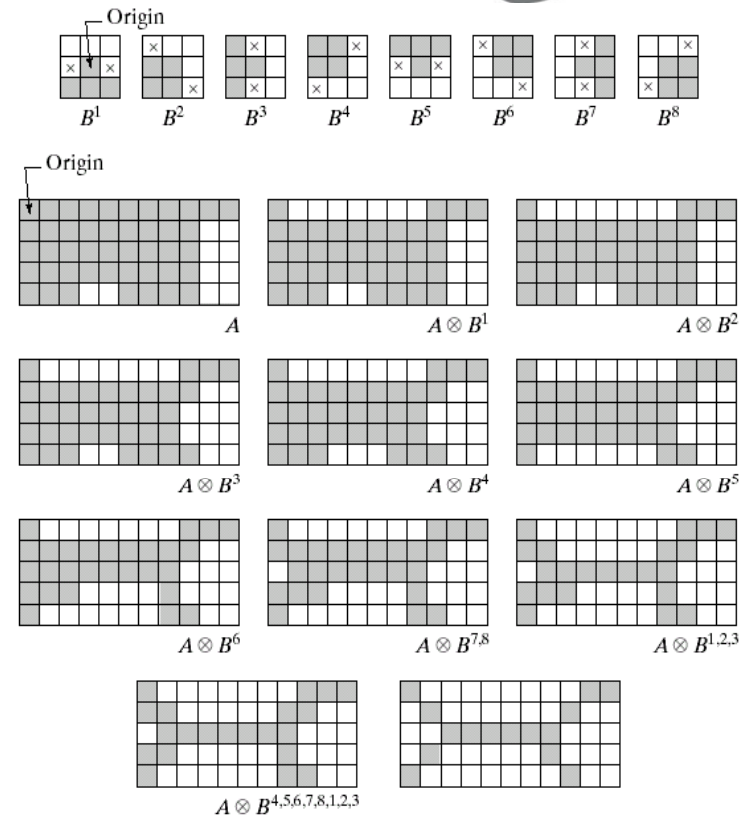
- Afinamento

$$A \otimes B = A - (A * B)$$

$$= A \cap (A * B)^c$$

$$\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, \dots, B^n\}$$

$$A \otimes \{B\} = (((((A \otimes B^1) \otimes B^2) \dots) \otimes B^n)$$



a		
b	c	d
e	f	g
h	i	j
k	l	

**FIGURE 9.21** (a) Sequence of rotated structuring elements used for thinning. (b) Set A. (c) Result of thinning with the first element. (d)–(i) Results of thinning with the next seven elements (there was no change between the seventh and eighth elements). (j) Result of using the first element again (there were no changes for the next two elements). (k) Result after convergence. (l) Conversion to *m*-connectivity.

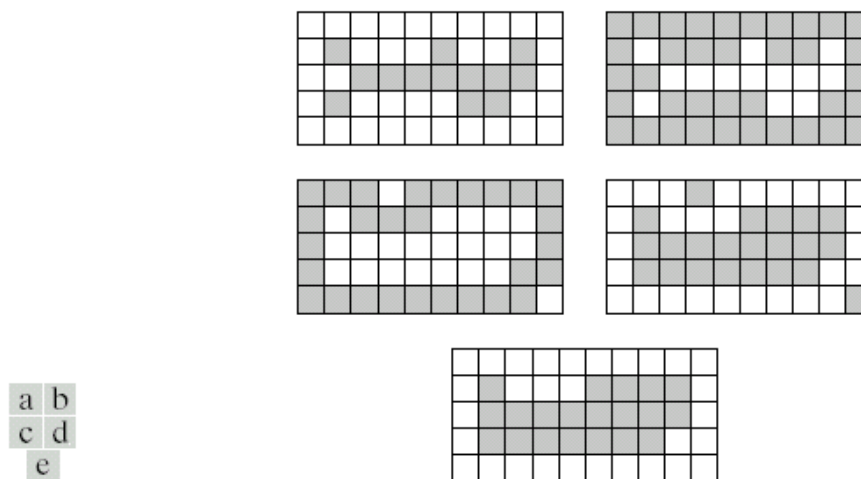
# Algoritmos Morfológicos Básicos

## Espessamento

- Espessamento

$$A \odot B = A \cup (A * B)$$

$$A \odot \{\mathbf{B}\} = \left( \left( \dots \left( (A \odot B^1) \odot B^2 \right) \dots \right) \odot B^n \right)$$



**FIGURE 9.22** (a) Set A. (b) Complement of A. (c) Result of thinning the complement of A. (d) Thickened set obtained by complementing (c). (e) Final result, with no disconnected points.

# Algoritmos Morfológicos Básicos

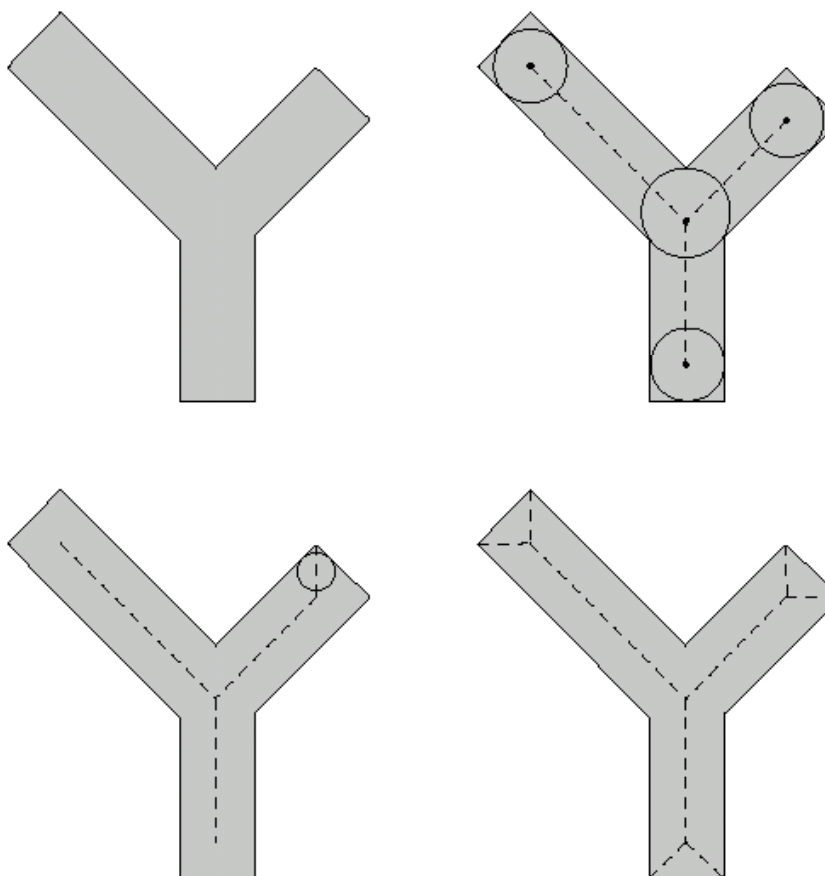
## Esqueletos

### ■ Esqueletos

a b  
c d

**FIGURE 9.23**

- (a) Set  $A$ .
- (b) Various positions of maximum disks with centers on the skeleton of  $A$ .
- (c) Another maximum disk on a different segment of the skeleton of  $A$ .
- (d) Complete skeleton.



# Algoritmos Morfológicos Básicos

## Esqueletos



- Formulação

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A)$$

$$S_k(A) = (A \ominus kB) - (A \ominus kB) \circ B, \quad \circ: \text{Opening}$$

$$(A \ominus kB) = \left( \left( \dots \left( (A \ominus B) \ominus B \right) \dots \right) \ominus B \right): \quad k \text{ times}$$

$$K = \max \{k \mid (A \ominus kB) \neq \emptyset\}$$

Reconstruction:

$$A = \bigcup_{k=0}^K (S_k(A) \oplus kB)$$

$$(A \oplus kB) = \left( \left( \dots \left( (A \oplus B) \oplus B \right) \dots \right) \oplus B \right): \quad k \text{ times}$$






# Algoritmos Morfológicos Básicos

## Esqueletos

$k \backslash$	$A \ominus kB$	$(A \ominus kB) \circ B$	$S_k(A)$	$\bigcup_{k=0}^K S_k(A)$	$S_k(A) \oplus kB$	$\bigcup_{k=0}^K S_k(A) \oplus kB$
0						
1						
2						



*B*

**FIGURE 9.24** Implementation of Eqs. (9.5-11) through (9.5-15). The original set is at the top left, and its morphological skeleton is at the bottom of the fourth column. The reconstructed set is at the bottom of the sixth column.

# Algoritmos Morfológicos Básicos

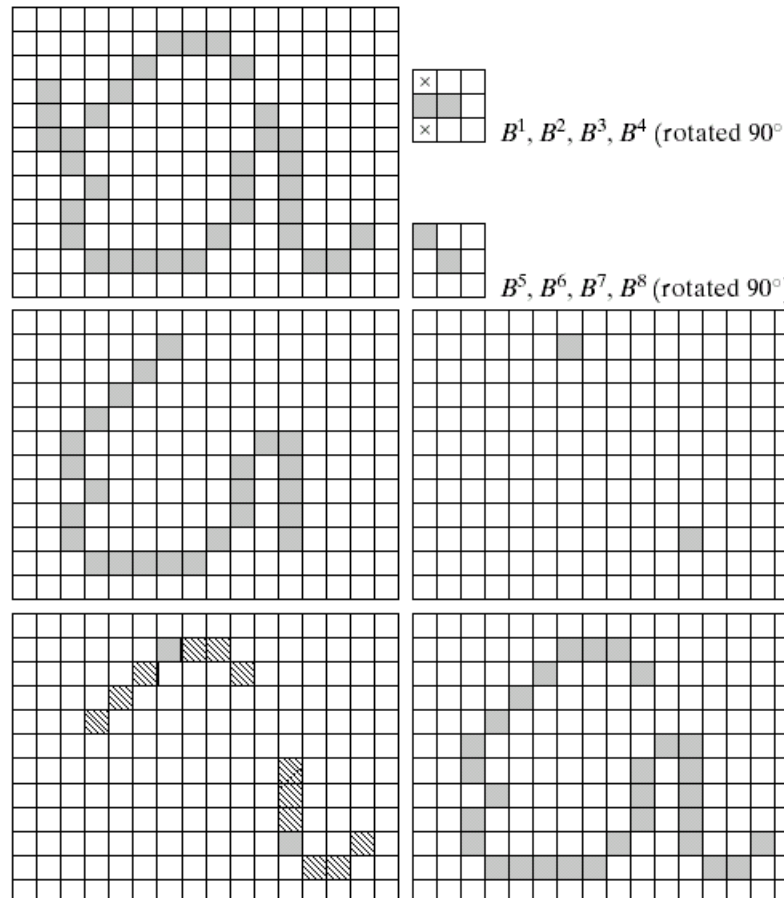
## Poda

- Poda

a b  
c  
d e  
f g

**FIGURE 9.25**

(a) Original image. (b) and (c) Structuring elements used for deleting end points. (d) Result of three cycles of thinning. (e) End points of (d). (f) Dilation of end points conditioned on (a). (g) Pruned image.



$$X_1 = A \otimes \{B\}$$

$$X_2 = \bigcup_{k=1}^8 (X_1 \circledast B^k)$$

$$X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A$$

$$X_4 = X_1 \cup X_3$$

# Resumo dos Operadores Morfológicos e suas Propriedades

**TABLE 9.2**  
Summary of morphological operations and their properties.

Operation	Equation	Comments (The Roman numerals refer to the structuring elements shown in Fig. 9.26).
Translation	$(A)_z = \{w   w = a + z, \text{ for } a \in A\}$	Translates the origin of $A$ to point $z$ .
Reflection	$\hat{B} = \{w   w = -b, \text{ for } b \in B\}$	Reflects all elements of $B$ about the origin of this set.
Complement	$A^c = \{w   w \notin A\}$	Set of points not in $A$ .
Difference	$A - B = \{w   w \in A, w \notin B\}$ $= A \cap B^c$	Set of points that belong to $A$ but not to $B$ .
Dilation	$A \oplus B = \{z   (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$	“Expands” the boundary of $A$ . (I)
Erosion	$A \ominus B = \{z   (B)_z \subseteq A\}$	“Contracts” the boundary of $A$ . (I)
Opening	$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$	Smooths contours, breaks narrow isthmuses, and eliminates small islands and sharp peaks. (I)
Closing	$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$	Smooths contours, fuses narrow breaks and long thin gulfs, and eliminates small holes. (I)

# Resumo dos Operadores Morfológicos e suas Propriedades



Hit-or-miss transform	$A \otimes B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$ $= (A \ominus B_1) - (A \oplus \hat{B}_2)$	The set of points (coordinates) at which, simultaneously, $B_1$ found a match (“hit”) in $A$ and $B_2$ found a match in $A^c$ .
Boundary extraction	$\beta(A) = A - (A \ominus B)$	Set of points on the boundary of set $A$ . (I)
Region filling	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c; X_0 = p \text{ and } k = 1, 2, 3, \dots$	Fills a region in $A$ , given a point $p$ in the region. (II)
Connected components	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A; X_0 = p \text{ and } k = 1, 2, 3, \dots$	Finds a connected component $Y$ in $A$ , given a point $p$ in $Y$ . (I)
Convex hull	$X_k^i = (X_{k-1}^i \otimes B^i) \cup A; i = 1, 2, 3, 4;$ $k = 1, 2, 3, \dots; X_0^i = A; \text{ and } D^i = X_{\text{conv}}^i.$	Finds the convex hull $C(A)$ of set $A$ , where “conv” indicates convergence in the sense that $X_k^i = X_{k-1}^i$ . (III)



# Resumo dos Operadores Morfológicos e suas Propriedades



Operation	Equation	Comments (The Roman numerals refer to the structuring elements shown in Fig. 9.26).
Thinning	$A \otimes B = A - (A \otimes B)$ $= A \cap (A \otimes B)^c$ $A \otimes \{B\} =$ $(( \dots ((A \otimes B^1) \otimes B^2) \dots ) \otimes B^n)$ $\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, \dots, B^n\}$	Thins set $A$ . The first two equations give the basic definition of thinning. The last two equations denote thinning by a sequence of structuring elements. This method is normally used in practice. (IV)
Thickening	$A \odot B = A \cup (A \otimes B)$ $A \odot \{B\} =$ $(( \dots (A \odot B^1) \odot B^2 \dots ) \odot B^n)$	Thickens set $A$ . (See preceding comments on sequences of structuring elements.) Uses IV with 0's and 1's reversed.

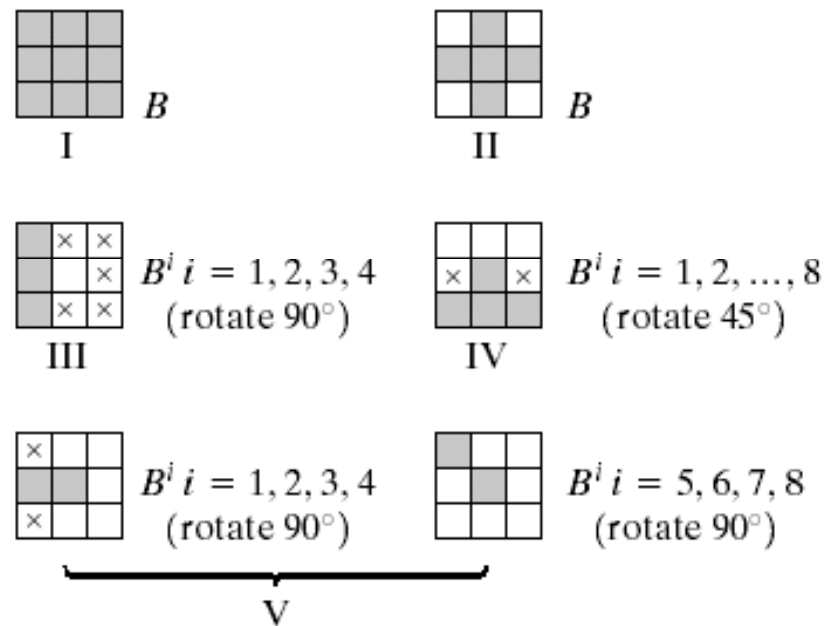
**TABLE 9.2**  
Summary of morphological results and their properties.  
(continued)



# Resumo dos Operadores Morfológicos e suas Propriedades

Skeletons	$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A)$ $S_k(A) = \bigcup_{k=0}^K \{ (A \ominus kB) - [(A \ominus kB) \circ B] \}$ <p>Reconstruction of <math>A</math>:</p> $A = \bigcup_{k=0}^K (S_k(A) \oplus kB)$	<p>Finds the skeleton <math>S(A)</math> of set <math>A</math>. The last equation indicates that <math>A</math> can be reconstructed from its skeleton subsets <math>S_k(A)</math>. In all three equations, <math>K</math> is the value of the iterative step after which the set <math>A</math> erodes to the empty set. The notation <math>(A \ominus kB)</math> denotes the <math>k</math>th iteration of successive erosion of <math>A</math> by <math>B</math>. (I)</p>
Pruning	$X_1 = A \otimes \{B\}$ $X_2 = \bigcup_{k=1}^8 (X_1 \otimes B^k)$ $X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A$ $X_4 = X_1 \cup X_3$	<p><math>X_4</math> is the result of pruning set <math>A</math>. The number of times that the first equation is applied to obtain <math>X_1</math> must be specified. Structuring elements <math>V</math> are used for the first two equations. In the third equation <math>H</math> denotes structuring element <math>I</math>.</p>

# 5 Elementos Estruturantes Básicos



**FIGURE 9.26** Five basic types of structuring elements used for binary morphology. The origin of each element is at its center and the  $\times$ 's indicate "don't care" values.

# Extensões para Imagens em Níveis de Cinza

---



- Trataremos com imagens (funções) digitais
  - $f(x,y)$ : imagem de entrada
  - $b(x,y)$ : elemento estruturante, subimagem (função)
- Assume-se que essas funções sejam discretas
  - $(x,y)$  são inteiros
  - $f$  e  $b$  sejam funções que atribuam um nível de cinza a cada par distinto de coordenadas  $(x,y)$ .



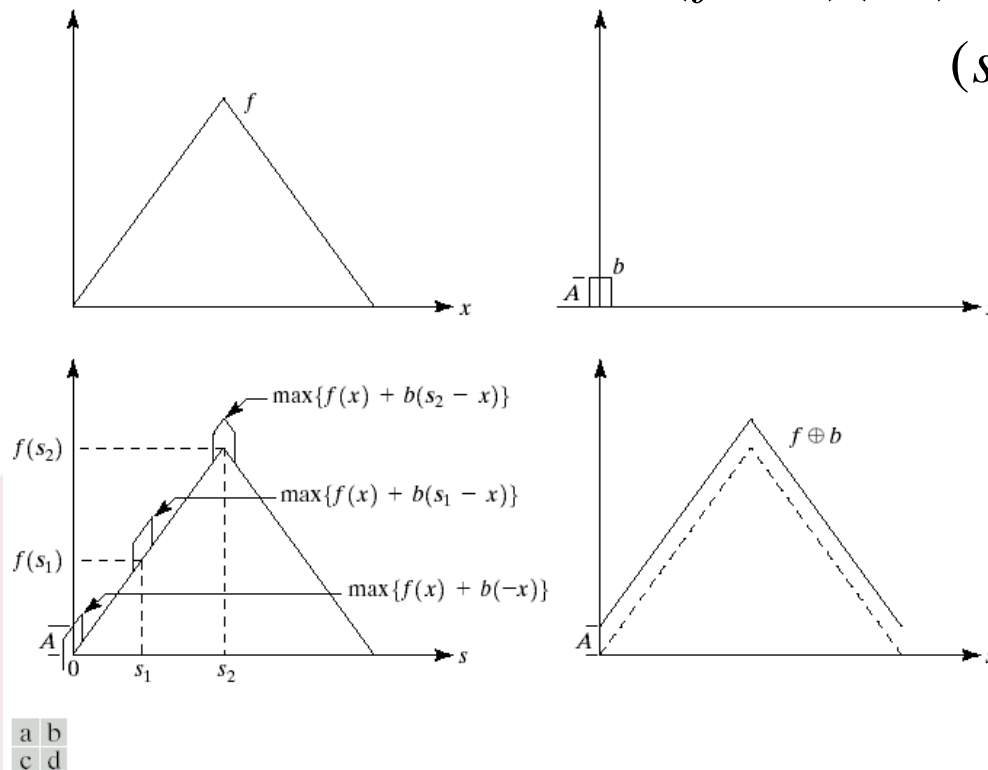


# Imagens em Níveis de Cinza

## Dilatação

- $D_f$  e  $D_b$  são os domínios de  $f$  e  $b$ , respectivamente

$$(f \oplus b)(s, t) = \max \{ f(s - x, y - t) + b(x, y) \mid (s - x), (t - y) \in D_f; (x, y) \in D_b \}$$



**FIGURE 9.27** (a) A simple function. (b) Structuring element of height  $A$ . (c) Result of dilation for various positions of sliding  $b$  past  $f$ . (d) Complete result of dilation (shown solid).

- A condição que os parâmetros de deslocamento  $(s-x)$  e  $(t-y)$  devam estar contidos no domínio de  $f$  é análoga à condição da definição binária da dilatação em que os dois conjuntos devem ser sobrepor pelo menos em um elemento.

# Imagens em Níveis de Cinza

## Dilatação



- Similar à convolução 2D
  - $f(s-x)$ :  $f(-x)$  é simplesmente  $f(x)$  invertido em relação à origem do eixo  $x$ . A função  $f(s-x)$  se move para a direita para  $s$  positivo, e a esquerda para  $s$  negativo.
  - A operação  $\max$  substitui as somas da convolução e a adição os produtos da convolução
- Efeito geral na imagem
  - Se todos os valores do elemento estruturante forem positivos, a imagem resultante tende a ser mais clara que a de entrada.
  - Detalhes escuros são reduzidos ou eliminados, dependendo de como seus valores e formatos estejam relacionados com o elemento estruturante usado para a dilatação



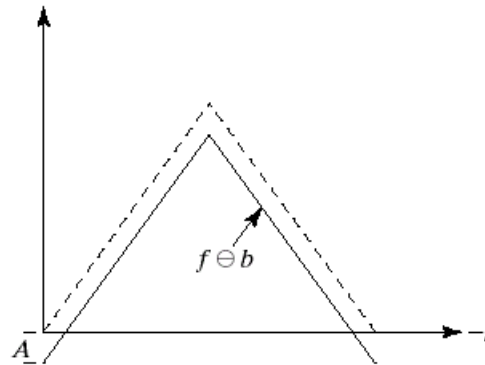
# Imagens em Níveis de Cinza

## Erosão

- A condição que os parâmetros de deslocamento  $(s+x)$  e  $(t+y)$  devem estar contidos no domínio de  $f$  é análoga à condição na definição binária de erosão em que o elemento estruturante deve estar completamente contido pelo conjunto que está sendo erodido.

$$(f \ominus b)(s, t) = \min \{ f(s+x, y+t) - b(x, y) \mid (s+x), (t+y) \in D_f; (x, y) \in D_b \}$$

**FIGURE 9.28**  
Erosion of the function shown in Fig. 9.27(a) by the structuring element shown in Fig. 9.27(b).



# Imagens em Níveis de Cinza

## Erosão

---



- Similar à correlação 2D
  - $f(s+x)$  move à esquerda para  $s$  positivo e à direita para  $s$  negativo.
- Efeito geral na imagem
  - Se todos os elementos do elemento estruturante forem positivos, a imagem de saída tende a ser mais escura que a imagem de entrada.
  - O efeito de detalhes claros na imagem de entrada que forem menor em “área” que o elemento estruturante é reduzido, sendo que o grau dessa redução é determinado pelos valores dos níveis de cinza em torno do detalhe claro e pela forma e valores de amplitude do próprio elemento estruturante.



# Imagens em Níveis de Cinza

## Dilatação e Erosão



- Propriedade Dual

- Dilatação e erosão em imagens em níveis de cinza são duais em relação à complementação de funções e à reflexão.

$$(f \ominus b)^c(s, t) = (f^c \oplus \hat{b})(s, t)$$

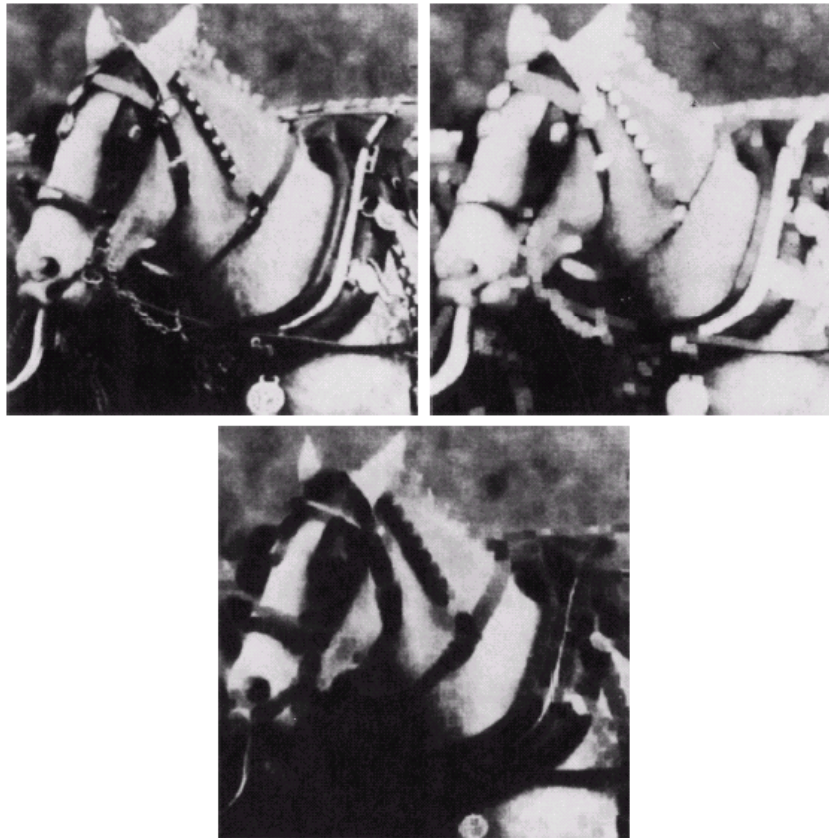
onde

$$f^c = -f(x, y) \text{ e } \hat{b} = b(-x, -y)$$



# Algumas Aplicações de Morfologia em Níveis de Cinza

- Exemplo:
  - Elemento estruturante 5x5.



a b  
c

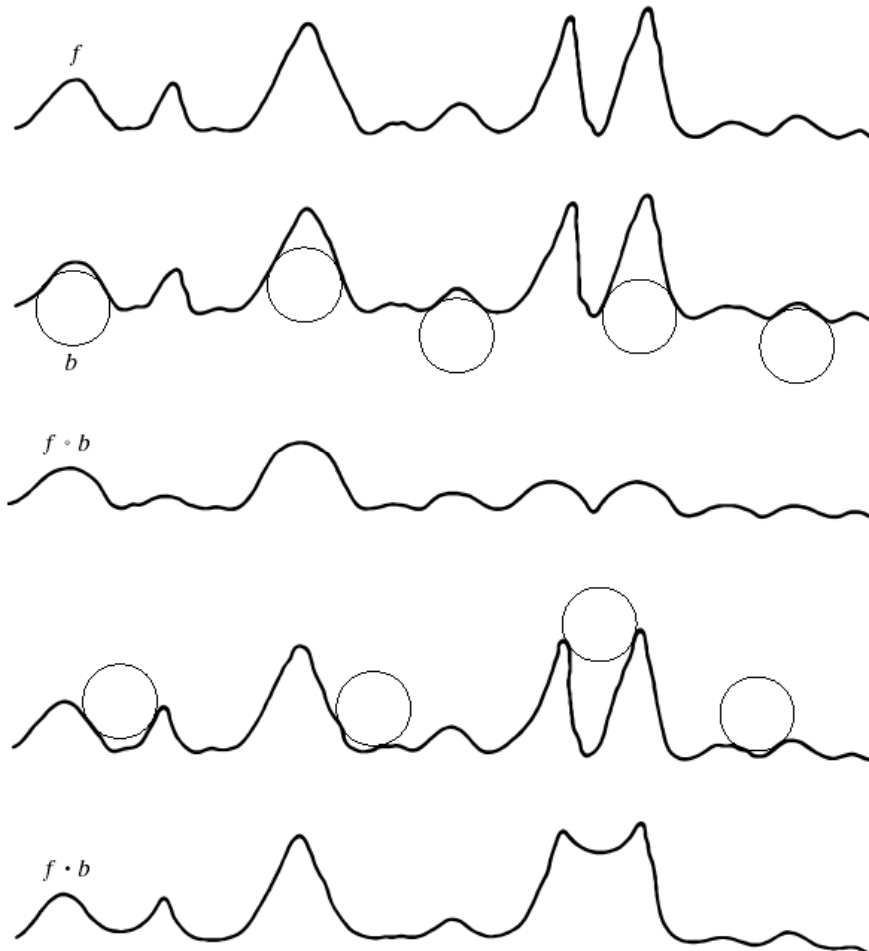
**FIGURE 9.29**

(a) Original image. (b) Result of dilation. (c) Result of erosion.

(Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)

# Imagens em Níveis de Cinza

## Dilatação e Erosão



a  
b  
c  
d  
e

**FIGURE 9.30**

(a) A gray-scale scan line.  
 (b) Positions of rolling ball for opening.  
 (c) Result of opening.  
 (d) Positions of rolling ball for closing.  
 (e) Result of closing.

Abertura e Fechamento

$$f \circ b = (f - b) \oplus b$$

$$f \bullet b = (f \oplus b) - b$$

Relação dual

$$(f \bullet b)^c = f^c \circ \hat{b}$$



# Imagens em Níveis de Cinza

## Abertura e Fechamento

- Exemplos:



a b

**FIGURE 9.31** (a) Opening and (b) closing of Fig. 9.29(a). (Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)



# Imagens em Níveis de Cinza

## Abertura e Fechamento

- Suavização morfológica
  - Abertura morfológica seguida de fechamento.
  - Efeito: remoção ou atenuação tanto de artefatos claros como escuros ou ruídos.

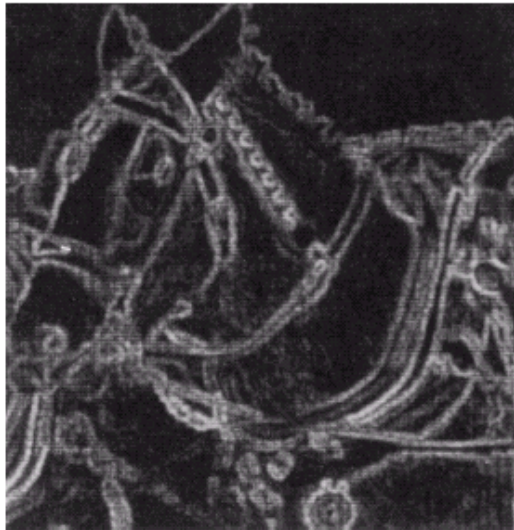


**FIGURE 9.32** Morphological smoothing of the image in Fig. 9.29(a). (Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)

# Algumas Aplicações de Morfologia em Níveis de Cinza

- Gradiente morfológico
  - Efeito: enfatiza as transições marcadas nos níveis de cinza da imagem de entrada. Tendem a depende menos da direção das bordas em comparação com Sobel.

$$g = (f \oplus b) - (f \ominus b)$$

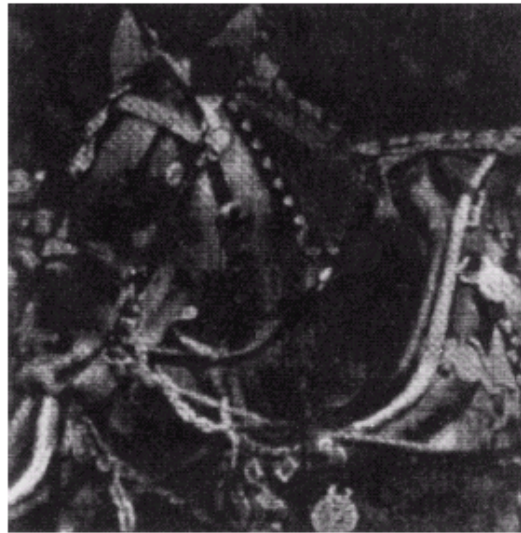


**FIGURE 9.33** Morphological gradient of the image in Fig. 9.29(a). (Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)

# Algumas Aplicações de Morfologia em Níveis de Cinza

- Transformada top-hat
  - Efeito: enfatizar o detalhe na presença de sombreamento.
  - Enfatização do detalhe na região do fundo abaixo da parte inferior da cabeça do cavalo.

$$h = f - (f \circ b)$$



**FIGURE 9.34** Result of performing a top-hat transformation on the image of Fig. 9.29(a).  
(Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)

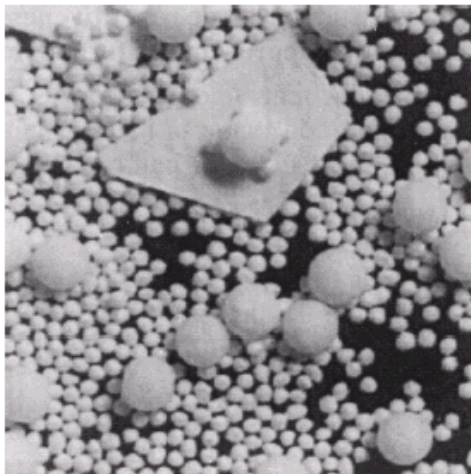
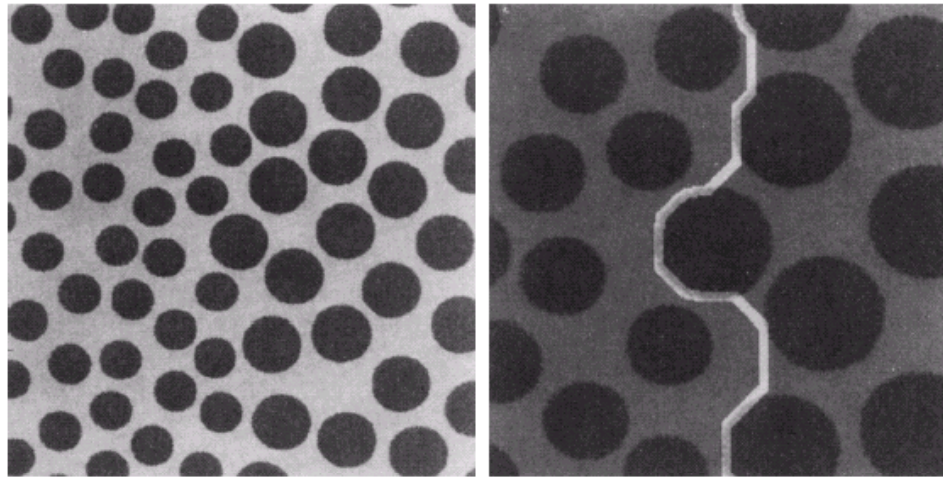
# Algumas Aplicações de Morfologia em Níveis de Cinza

## Segmentação por Textura - Granulometria

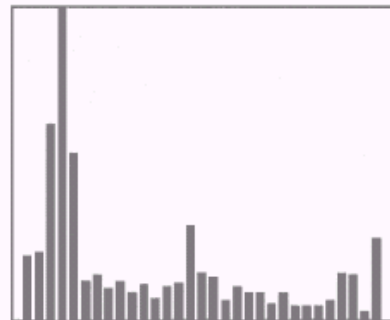
a b

**FIGURE 9.35**

(a) Original image. (b) Image showing boundary between regions of different texture. (Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)



Size Dist'n



a b

**FIGURE 9.36**

(a) Original image consisting of overlapping particles; (b) size distribution. (Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)